BAC 2002 SESSION DE CONTROLE

EXERCICE 1

Soit f la fonction définie sur $]-2;+\infty[$ par $f(x) = \text{Log}(x+2)$

1/a- Dresser le tableau de variation de f.

b- Tracer la courbe C_f de f dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

2/ Soit m un réel de l'intervalle $]-2;-1[$ et A_m la mesure de l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = m$ et $x = -1$.

a- Montrer que $\int_{-1}^{m} \frac{x}{x+2} dx = m + 1 - 2\text{Log}(m+2)$.

b- Calculer A_m en fonction de m.

c- Calculer $\lim\limits_{m \to -2^+} A_m$.

3/ Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans l'intervalle $]-1;+\infty[$ une solution unique noté α. Vérifier que $1,1 < \alpha < 1,2$.

4/ Soit (u_n) la suite définie sur IN par : $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

a- montrer que $\forall n \in \text{IN}; u_n > \alpha$.

b- Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

c- Déduire que (u_n) converge. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

EXERCICE 2

Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$; on considère les points A et B d'affixes respectives 1 et -1 et on désigne par P' le plan P privé du point A. Soit f l'application de P' dans P qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \frac{z(\bar{z}-1)}{z-1}$.

1/a- Soit C le point d'affixe i. Déterminer le point f(C).

b- Soit ζ le cercle de centre O et de rayon 1. Montrer que tout point M de $\zeta \backslash \{A\}$ on a $f(M) = B$.

2/ Déterminer l'ensemble des points invariants par f.

3/ Soit M un point quelconque du plan privé de la droite (AB) et de ζ. On désigne par M_1 l'image de M par la symétrie orthogonale d'axe (AB) et par M' l'image de M par f.

a- On désigne par $Z_{\overrightarrow{M_1M'}}$ et $Z_{\overrightarrow{AM_1}}$ les affixes respectives des vecteurs